

# 微分形式とマクスウェル方程式

O.F.

2015年1月24日

## 目次

1	<b>導入</b>	2
1.1	微分1形式と線積分	2
1.2	微分2形式と面積分	4
2	<b>定義</b>	6
2.1	一般の微分形式	6
2.2	微分形式のなす空間	9
2.3	微分形式の引き戻し	10
2.4	ホッジのスター作用素	13
3	<b>3次元の場合</b>	15
4	<b>マクスウェル方程式の書き換え</b>	20
4.1	書き換え	20
4.2	波動方程式	21
4.3	ポテンシャル	22
4.4	完全系列	23

## Abstract

マクスウェル方程式を基礎方程式とする電磁気学では、電場  $E$  や磁束密度  $B$  などの  $\mathbb{R}^3$  上のベクトル値関数の微積分 (ベクトル解析) が用いられるが、そこでは空間が3次元である恩恵をととも被っており、またそのためにある種の混同が見られるとも言える。ここでは、微分形式という概念を用いて、電磁気まわりのベクトル解析の語彙を言い換えることで、マクスウェル方程式を少し違った見方から眺めてみたい。また、微分形式は、その言葉面に恐怖を覚えて敬遠されてしまう向きもあるようだが、ユークリッド空間内のものに制限してみても、計算を非常に簡略化してくれる便利な道具であり、是非各位は詳しく勉強して僕にお教えいただきたい。

## 1 導入

以下、簡単のため関数、写像はすべて  $C^\infty$  級とするが、仮定はもっと弱くできるので適宜言い換えて欲しい。また、この章は主に [3] を参考にした。

### 1.1 微分 1 形式と線積分

微積分学の基本定理というものがある。その一つの表現は次のようであろう。

**Theorem 1.1** (微積分学の基本定理). 関数  $F(t)$  に対し、

$$\int_a^b \frac{dF}{dt}(t) dt = F(b) - F(a)$$

が成り立つ。

これは、微分  $\frac{dF}{dt}$  が分かれば 2 点での関数の値の差が得られることを述べている。これを、一般の  $\mathbb{R}^n$  上の  $\mathbb{R}$  値関数に拡張することを考える。

$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上の関数とし、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  を  $U$  の 2 点とする。このとき、この 2 点での  $f$  の値の差  $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})$  を得るにはどのような情報が必要かを考えると、 $\mathbf{y}$  から  $\mathbf{z}$  に至る  $U$  内の曲線  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ( $\gamma(a) = \mathbf{y}$ ,  $\gamma(b) = \mathbf{z}$ ) をとれるときには、線積分によって得ることができることが分かる：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \\ &= \int_a^b \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t) dt. \end{aligned}$$

ここで、合成関数の微分は、

$$\frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_n}{dt}(t)$$

と計算される。ここで  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  とした。これを用いれば、

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_n}{dt}(t) \right) dt$$

と計算されるが、この右辺の積分の中身を、形式的な式  $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$  の  $dx_i$  を置換積分のために  $\frac{d\gamma_i}{dt}(t) dt$  で置き換えたものだと考えて、上の定積分を、 $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$  の曲線  $\gamma$  上の (線) 積分と定義する。すなわち、

$$\int_\gamma \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_n}{dt}(t) \right) dt.$$

この線積分を、微分 1 形式というもう少し一般の状況に対して定義する。

**Definition 1.2** (微分 1 形式, 線積分).  $f_1, \dots, f_n$  を、 $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上の関数とするとき、

$$f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$$

の形をした式のことを  $U$  上の微分 1 形式 ((differential) 1-form) と呼ぶ。また、微分 1 形式  $f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  の曲線  $\gamma$  に沿った (線) 積分を、

$$\int_{\gamma} (f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n) = \int_a^b \left( f_1(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \cdots + f_n(\gamma(t)) \frac{d\gamma_n}{dt}(t) \right) dt$$

で定義する。

この言葉を用いれば、先ほど見たことは、 $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$  という微分 1 形式があれば、線積分によって、もとの関数  $f$  が定数の差を除いて復元できるということである (微積分学の基本定理の類似)。この微分 1 形式を、関数  $f$  の全微分と呼ぶのである。

**Definition 1.3** (全微分).  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上の関数  $f$  に対し、微分 1 形式

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

を  $f$  の全微分と呼び、 $df$  と書き表す。

この表記を用いて先ほどみた結果を書き直しておこう。

**Theorem 1.4** (微積分学の基本定理の類似). ユークリッド空間の開集合  $U$  上の関数  $f$  と  $U$  内の曲線  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  に対し、

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

が成り立つ。

このように、全微分を積分すれば、( $U$  が弧状連結であるならば) 元の関数が定数の差を除いて復元できるのであるが、一方、一変数の時に積分によって原始関数を得たことの類似、つまり、一般の微分 1 形式  $f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  に対して  $dF = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  となるような関数  $F$  を見つけるという問題はどうか。まず必要条件を求めると、そのような関数  $F$  が存在するならば、 $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$  となるから、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

となり、そのような  $F$  が存在するためには少なくとも

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

が任意の  $i, j$  について成り立っていないなければならないことが分かる。これは積分可能条件とも呼ばれる。一般の微分 1 形式にはこれを満たさないものももちろんたくさんあるから、一変数の場合の原始関数にあたるものは多変数では常に取れるわけではないということが分かる。

一方、これが十分条件でもあるのかどうかというのは大きな問題であり、実はこれが、空間 (この場合は開集合  $U$ ) の性質を表す指標であると言えるのだが (ドラムコホモロジー)、それは後に回し、次の事実のみを述べる。

**Proposition 1.5.** ユークリッド空間の開集合  $U$  が星形であるとは、ある  $U$  の点  $\mathbf{y}$  が選べて、 $U$  の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を結ぶ線分が  $U$  に含まれていることであると定義する。

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の星形開集合  $U$  上で定義された微分 1 形式

$$f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

が積分可能条件  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  を満たしているならば、上の星形開集合の定義での  $\mathbf{y}$  をとって、 $\mathbf{x}$  での値を  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{x}$  を結ぶ線分上での  $\mathbf{y}$  から  $\mathbf{x}$  への線積分として定義した関数  $F$  は、 $dF = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  を満たす。

特に、星形開集合の場合には、微分 1 形式  $f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  について、積分可能条件を満たすことと  $dF = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  となる関数  $F$  が存在することは同値である。

## 1.2 微分 2 形式と面積分

次に、積分可能条件を満たさないような微分 1 形式について考える。このような場合には、線積分の値が経路によって変わってしまうことがある。今、単純のため平面  $\mathbb{R}^2$  で考えることにし、微分 1 形式  $f_1 dx_1 + f_2 dx_2$  の、長方形  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  の境界上での線積分  $\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, a_2) dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1, x_2) dx_2$  と  $\int_{a_2}^{b_2} f_2(a_1, x_2) dx_2 + \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, b_2) dx_1$  が異なっている場合を想定して、その差を計算してみると、

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, a_2) dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1, x_2) dx_2 - \int_{a_2}^{b_2} f_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, b_2) dx_1 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} (f_2(b_1, x_2) - f_2(a_1, x_2)) dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} (f_1(x_1, b_2) - f_1(x_1, a_2)) dx_1 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

となる。ここで途中（一変数の）微積分学の基本定理を用いて差を定積分に言い直した。これを見ると、 $\left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$  という量が 0 でない点があるならば、その十分近くにとった長方形で上の積分が 0 とならず、積分可能条件を満たさない。つまり、 $\left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$  は、微分 1 形式  $f_1 dx_1 + f_2 dx_2$  が全微分  $df$  として表せられない度合いを示しており、それをある領域で積分すれば、その周上での線積分に現れる差を表すようなそんな量であると言える。

ここで、 $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$  が  $f_1, f_2$  の全微分に現れるものであることや符号などに注目して、天下りの的ではあるが、同じものとは打ち消し合い、順序を変えると符号が変わる積  $\wedge$  (外積 (exterior product) と呼ばれる) を導入して、

$$\begin{aligned} df_1 \wedge dx_1 &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 \\ df_2 \wedge dx_2 &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 \end{aligned}$$

を考える。外積  $\wedge$  の計算規則を、先ほど述べたように

$$dx_1 \wedge dx_1 = 0, \quad dx_2 \wedge dx_2 = 0, \quad dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1$$

で定義すると,

$$df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

となり, 先ほどの形が現れる. この左辺を  $d(f_1 dx_1 + f_2 dx_2)$  と書いてみれば,  $d$  はライプニッツの法則 (積の微分の公式) を満たす「微分」であり, さらに  $d(dx_1) = 0, d(dx_2) = 0$  を課したものと言える. ここで, 「微分」を 2 度作用させると 0 になるというのは, 平面上の関数  $f$  に対して,  $d(df) = 0$  となることと合致する. 実際,

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{aligned}$$

となっている.

さて, ここまでの記号を用いて, 先ほどみた長方形の境界での線積分の計算をまとめると, 長方形  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  上の微分 1 形式  $\alpha$  に対して,

$$\int_{[a_1, b_1] \times \{a_2\}} \alpha + \int_{\{b_1\} \times [a_2, b_2]} \alpha - \int_{[a_1, b_1] \times \{b_2\}} \alpha - \int_{\{a_1\} \times [a_2, b_2]} \alpha = \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} d\alpha$$

が成り立つということになる. 少し考えれば分かるが, これは実はストークスの定理の単純な場合に対応している.

上の状況設定を敷衍して, 一般の微分 2 形式を定義する.

**Definition 1.6** (微分 2 形式).  $f_{ij}$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上の関数とすると,  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$  の形の式を微分 2 形式と呼ぶ.

また, 先ほどの議論を参考にして, 微分 1 形式同士の外積を次で定義する.

**Definition 1.7** (微分 1 形式の外積).  $U$  上の微分 1 形式  $\sum_{i=1}^n f_i dx_i, \sum_{j=1}^n g_j dx_j$  に対し,

$$\left( \sum_{i=1}^n f_i dx_i \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^n g_j dx_j \right) = \sum_{i,j=1}^n f_i g_j dx_i \wedge dx_j$$

と定義する. ただし,  $dx_i \wedge dx_i = 0, dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$  とする.

微分 2 形式に現れるのは実質的には  $i < j$  となる  $dx_i \wedge dx_j$  の項のみで十分であるが, 必要に応じて上のように和をとる範囲を広くとる.

そして, 微分 1 形式の外微分を次で定義する.

**Definition 1.8** (微分 1 形式の外微分).  $U$  上の微分 1 形式  $\sum_{i=1}^n f_i dx_i$  に対し, その外微分を

$$d\left(\sum_{i=1}^n f_i dx_i\right) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i$$

で定義する. ここで  $df_i$  は  $f_i$  の全微分である.

ここで次の言葉を定義する.

**Definition 1.9** (閉形式, 完全形式). 微分 1 形式  $\alpha$  は, その外微分  $d\alpha$  が 0 であるとき, 閉形式であると言われる. また, それがある関数の全微分に等しいとき, 完全形式であると言われる.

先ほども何度か確かめたように, 完全形式は閉形式である. また, この言葉を使えば, 前に述べた星形開集合の性質は,

星形開集合においては, 微分 1 形式が閉形式であることと完全形式であることは同値である

と表現することができる.

さて, 先ほど長方形上での面積分のようなものを定義したが, 一般の曲線上での微分 1 形式の線積分を定義したように, 一般の曲面 (ここでは長方形の ( $C^\infty$  級) 写像による像) 上での微分 2 形式の面積分を次のように定義する.

**Definition 1.10** (面積分).  $\beta = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$  を  $U$  上の微分 2 形式とし, ある ( $C^\infty$  級) 写像  $\kappa : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow U$  をとる ( $\kappa(t_1, t_2) = (\kappa_1(t_1, t_2), \dots, \kappa_n(t_1, t_2))$ ) とする). このとき,  $\kappa$  に沿った  $\beta$  の面積分を,

$$\int_{\kappa} \beta = \int_{\kappa} \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \sum_{i < j} f_{ij}(\kappa(t_1, t_2)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_1} & \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \kappa_j}{\partial t_1} & \frac{\partial \kappa_j}{\partial t_2} \end{pmatrix} dt_1 dt_2$$

と定義する.

これで, 先ほど述べた, 長方形 (の像) の境界での微分 1 形式の線積分は, その微分 1 形式の外微分の長方形 (の像) での面積分に等しいという命題が定式化できる ( $\mathbb{R}^n$  内の長方形ではなく一般の  $\kappa$  について示すのは簡単な式変形の問題である).

さて, 以上で述べたように, 多変数において, 微積分学の基本定理の拡張とも言える “微分して積分して復元する” ことを考えると, 微分 1 形式である関数の全微分というものが自然に定義され, さらに微分 1 形式から関数を復元できるかという問題を考えると, 微分 2 形式が現れた. 以下ではこれを参考に, 一般の微分  $p$  形式を定義し, いくつかの議論を行う.

## 2 定義

### 2.1 一般の微分形式

$n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上で,  $1 \leq p \leq n$  を満たす整数  $p$  について, 微分  $p$  形式を定義したい. そこで, 前章での議論のようにして, 微分  $p$  形式は,  $dx_i$  の形のを  $p$  個, 外積 “ $\wedge$ ” を用いて繋いだものに, 適当な関数を係数として付け, 和をとったものと定義する. ただしここで, 外積の演算は, 同じ要素が 2 つでも入っていたら 0 になり, また順序を入れ替えると (互換を作用させると) 符号が変わるようなものとする. つまり,

(1)  $i_1, \dots, i_p$  の中に同じものが一つでもあれば

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = 0.$$

(2)  $(i_1, \dots, i_p)$  は全て異なるとして, ) 添字の並べ替え  $\{i_1, \dots, i_p\} \rightarrow \{j_1, \dots, j_p\}$  に対して,

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}.$$

を課す. ここで  $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$  は置換の符号である. よって実際は  $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$  を満たす  $i_1, \dots, i_p$  についてのみ  $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$  の項を考えればよく, その数は  ${}_n C_p$  個で十分であるが, 必要に応じて表記上これ以外のものも用いる. また,  $n < p$  の時は, 必ず同じ要素が 2 つ以上入ってしまうので, 微分  $p$  形式は 0 のみであるとする.

**Definition 2.1** (微分  $p$  形式).  $f_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{x})$  ( $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ ) を  $U$  上の  $C^\infty$  級関数とする.

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

を,  $U$  上の微分  $p$  形式という.

さて, 一般の微分形式の外積, 外微分, 積分を定義しよう.

**Definition 2.2** (外積). 微分  $p$  形式  $\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$  と微分  $q$  形式  $\beta = \sum_{j_1 < \cdots < j_q} g_{j_1 \dots j_q} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$  に対し, その外積を,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \left( \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) \wedge \left( \sum_{j_1 < \cdots < j_q} g_{j_1 \dots j_q} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{j_1 < \cdots < j_q} f_{i_1 \dots i_p} g_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \end{aligned}$$

と定義する.

次は定義から容易に分かる.

**Proposition 2.3** (次数付き可換性). 微分  $p$  形式  $\alpha$  と微分  $q$  形式  $\beta$  に対して,  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$  が成り立つ.

**Definition 2.4** (外微分). 微分  $p$  形式  $\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$  に対し, その外微分  $d\alpha$  を, 微分  $(p+1)$  形式

$$d\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

として定義する. ここで  $df_{i_1 \dots i_p}$  は  $f_{i_1 \dots i_p}$  の全微分である.

次も式変形によってすぐ分かる.

**Proposition 2.5** (ライプニッツ則の類似). 微分  $p$  形式  $\alpha$  と微分  $q$  形式  $\beta$  に対して,  $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$  が成り立つ.

また, 次は重要な性質である.

**Proposition 2.6.** 任意の微分  $p$  形式  $\alpha$  について,

$$d(d\alpha) = 0$$

が成り立つ.

*Proof.* 微分  $p$  形式  $\alpha$  を  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  と表したとすると,

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= d \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^n d \left( \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \sum_{k < j} \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} - \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j < k} \left( \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = 0 \end{aligned}$$

よりよい (途中  $dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = -dx_j \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  を用いた).

□

次に微分 1 形式の線積分, 微分 2 形式の面積分にあたるものを定義する.

**Definition 2.7.**  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上で定義された微分  $p$  形式  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  と,  $p$  次元直方体から  $U$  への ( $C^\infty$  級) 写像  $\kappa : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \rightarrow U$  に対し,  $\kappa$  に沿った  $\alpha$  の積分を,

$$\begin{aligned} \int_{\kappa} \alpha &= \int_{\kappa} \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p}(\kappa(t_1, \dots, t_p)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \kappa_1}{\partial t_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \kappa_p}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \kappa_p}{\partial t_p} \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_p \end{aligned}$$

と定義する.

微分 1 形式の線積分, 微分 2 形式の面積分が確かにそれぞれ上の定義に合致している. また, 上では和は  $i_1 < \dots < i_p$  なるものについて取ったが, それ以外の添字を取った場合も, 置換の符号分の違いは, ちょうど行列式の符号分の違いと打ち消し合うので, 上の定義はそのまま和を取る範囲を広げても適用できる.

## 2.2 微分形式のなす空間

ここまで個々の微分形式に注目してきたが, ここで微分形式全体の集合を考えてみる.

$C^\infty$  級関数は, その和や定数 (実数) 倍もまた  $C^\infty$  級関数であるから, それら全体は実ベクトル空間をなす. そして, 微分形式同士の和やその定数倍を, 係数 (となっている  $C^\infty$  級関数) ごとの和や定数倍として定義すれば, 微分形式全体は自然に実ベクトル空間となる.

今,  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上の  $C^\infty$  級関数を微分 0 形式とみなし,  $U$  上の微分  $p$  形式のなす集合を  $\Omega^p(U)$  を書くことにする (ただし,  $p < 0, p > n$  については  $\Omega^p(U) = \{0\} = \mathbf{0}$  とする). すると, 先ほど述べたように,  $\Omega^p(U)$  は実ベクトル空間になる.  $U$  が空でなければ,  $0 \leq p \leq n$  に対して,  $\Omega^p(U)$  は無限次元の実ベクトル空間である.

また, 外微分  $d$  は, 微分  $p$  形式から微分  $(p+1)$  形式を与える対応であるが, これは外微分の定義から明らかのように, 線形写像  $d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$  である (ただし  $p=0$  については関数の全微分とする). ここで特に, それが  $\Omega^p(U)$  から  $\Omega^{p+1}(U)$  への線形写像であることを強調したいときには  $d^p$  と書くことにする.

すると, 下のようなベクトル空間と線形写像からなる系列が得られる.

$$\mathbf{0} \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-2}} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(U) \rightarrow \mathbf{0}$$

ここで, 外微分は 2 回作用させると 0 になったこと (Proposition 2.6) を思い出せば, 線形写像の合成として,  $d^{p+1} \circ d^p: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+2}(U)$  が 0 写像 (全ての元を 0 に送る線形写像) であることが言える. つまり, 上の系列は “2 つ行ったら 0 になる” 系列である. 一般に “2 つ行ったら 0 になる” 系列を複体というが, 上の複体はドラーム複体 (de Rham complex) などと呼ばれる. “2 つ行ったら 0 になる” ということは  $\text{Im}(d^{p-1}) \subset \text{Ker}(d^p)$  とも表現できる\*1.

さて, 前に微分 1 形式に対して閉形式, 完全形式という言葉を定義したが, これを一般の微分  $p$  形式についても定義しよう.

**Definition 2.8** (閉形式, 完全形式). 微分  $p$  形式  $\alpha$  は, その外微分  $d\alpha$  が 0 であるとき, 閉形式であると言われる. また, それがある微分  $p-1$  形式の外微分に等しいとき, 完全形式であると言われる.

これは, 先ほど述べた外微分を線形写像とみる見方を使えば, 微分  $p$  形式  $\alpha$  に対して

$$\begin{aligned} \alpha \text{ が閉形式である} &\Leftrightarrow \alpha \in \text{Ker}(d^p) \\ \alpha \text{ が完全形式である} &\Leftrightarrow \alpha \in \text{Im}(d^{p-1}) \end{aligned}$$

と言い換えることもできる. また, 外微分は 2 回合成すると 0 になることから,

$$\text{完全形式} \Rightarrow \text{閉形式}$$

は常に成り立つ. さて, その逆について, ユークリッド空間の星形開集合の場合は次のような重要な事実が成立する.

\*1  $\text{Im}$  や  $\text{Ker}$  の定義は後に Definition 4.6 でも述べた.

**Theorem 2.9** (ポアンカレの補題).  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  が星形であるとき,  $1 \leq p \leq n$  に対して, 微分  $p$  形式が閉形式ならば完全形式である.

証明は省略する. [3]などを参照されたい. これにより, 微分  $p$  形式 ( $1 \leq p \leq n$ ) について, 閉形式であること完全形式であることは同値である. これは

$$\text{Im}(d^{p-1}) = \text{Ker}(d^p) \quad (\Omega^p(U) \text{ の部分空間として等しい})$$

とも表現できる.  $\mathbb{R}^n$  自身も  $\mathbb{R}^n$  の星形開集合であるから,  $\mathbb{R}^n$  全体の上の微分形式について常に上の事実が成り立つということになる. 3次元の場合のベクトルポテンシャルの存在などはこれの特殊な場合と見なせる.

### 2.3 微分形式の引き戻し

微分形式の主立った特徴として, 座標変換によって不変であるという性質がある. ここで不変であるというのは, それぞれの座標での表式はもちろん異なるのであるが, それらが果たす微分形式としての役割は等しいと見なせるということである. 微分形式は, ベクトル場のようなベクトル値関数の微分積分を定式化するように作られたものであるから, 座標変換に際して外微分と積分を保つような微分形式の変換が考えられなければならないだろう.

微分  $p$  形式の積分の定義 (Definition 2.7) を見ると, これは言わば, 空間内の “ $p$ 次元の図形  $\kappa([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p])$ ” の微分  $p$  形式の積分は “ $\mathbb{R}^p$  の  $p$ 次元直方体にもどって” 計算されるということであるから,  $\kappa$  を違うものに取り替えても, それに応じて微分形式の方も取り替えれば, 積分を同様に定義できることが予想される. 座標変換は  $C^\infty$  級写像  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  のことだと捉えられるから, 今,  $\kappa: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \rightarrow \mathbb{R}^n$  と, それと  $T$  との合成  $T \circ \kappa: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \rightarrow \mathbb{R}^n$  について,

$$\int_{\kappa} \alpha = \int_{T \circ \kappa} \beta$$

となるような  $\alpha$  と  $\beta$  の関係が見たいのである. ここで, 最も簡単な場合として, やはり微積分学の基本定理の拡張として得た線積分に関する関係式を見てみる.

$\mathbb{R}^n$  上の  $C^\infty$  級関数  $f$  の全微分  $df$  は微分 1 形式になるのであった. 今, 座標変換にあたるものとして, もっと一般の  $C^\infty$  級写像  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \neq m$  でもよい) をとる. 合成  $f \circ T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ももちろん ( $\mathbb{R}^m$  上の)  $C^\infty$  級写像である. また,  $\mathbb{R}^m$  内の曲線  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m: C^\infty$  級をとる. 合成  $T \circ \gamma$  ももちろん ( $\mathbb{R}^n$  内の) 曲線である.

これらの  $C^\infty$  級写像と曲線について, 微積分学の基本定理の拡張 (Theorem 1.4) を書き起こしてみると,

$$\begin{aligned} \int_{T \circ \gamma} df &= f(T \circ \gamma(b)) - f(T \circ \gamma(a)) \\ \int_{\gamma} d(f \circ T) &= f \circ T(\gamma(b)) - f \circ T(\gamma(a)) \end{aligned}$$

となる. ここで見やすいように関数の合成を括弧を繰り返す方法と  $\circ$  で表す方法を使い分けて表記したが, これらは同じことだから, 結局, これらの積分は等しいということになる:

$$\int_{T \circ \gamma} df = \int_{\gamma} d(f \circ T).$$

さて, これで, 線積分と全微分については, もとの目的にかなうものとして, 座標変換の “行き先” の微分形式  $df$  に対して “こちら側” の微分形式  $d(f \circ T)$  を対応させればいいことが分かる. 特に, この対応は座標

変換と逆の対応である (つまり座標変換が  $U$  から  $W$  へのものであるとき、微分形式の間の対応は  $W$  から  $U$  へのもことになる). これは“引き戻し (pull-back)”という言葉のニュアンスとも合致する (そもそも  $f$  に対して  $f \circ T$  を与えるのが“逆向き”である).

さて、これはある関数の全微分として表せる微分 1 形式のみについてしか考えなかったから、一般の微分 1 形式について考えるために全微分の表式をバラしてみる. ここで  $T$  の値域である  $\mathbb{R}^n$  の座標は  $x_1, \dots, x_n$  で、定義域である  $\mathbb{R}^m$  の座標は  $y_1, \dots, y_m$  で表した.

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\ d(f \circ T) &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ T)}{\partial y_j} dy_j \end{aligned}$$

ここで後者は、合成関数の偏微分の連鎖律  $\frac{\partial (f \circ T)}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(T)}{\partial x_i} \frac{\partial T_i}{\partial y_j}$  を使えば (ここで  $T_i$  は  $T$  の第  $i$  成分),

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ T)}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(T)}{\partial x_i} \frac{\partial T_i}{\partial y_j} dy_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ T \right) \frac{\partial T_i}{\partial y_j} dy_j.$$

よって、関数  $f$  に対して  $f \circ T$  を対応させたように、関数  $f$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  に対し  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ T$  を対応させ、また  $dx_i$  に対し  $\sum_{j=1}^m \frac{\partial T_i}{\partial y_j} dy_j$  を対応させることにすれば、先ほどの全微分として与えられる場合と整合性がある. よって、関数  $T$  による、微分形式  $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  の引き戻し  $T^* \alpha$  を、

$$T^* \alpha = \sum_{i=1}^n (f_i \circ T) \sum_{j=1}^m \frac{\partial T_i}{\partial y_j} dy_j$$

と定義する. また、関数  $f$  に対しては、その引き戻し  $T^* f$  を単なる合成  $f \circ T$  として定義する.

ここで、一般に行われている、座標変換  $T$  の第  $i$  成分  $T_i$  を  $x_i = x_i(y_1, \dots, y_m)$  のように書いて  $x_i$  で関数をも表す記法を使えば、座標変換先での微分 1 形式の基底であった  $dx_i$  を、そっくりそのまま、 $m$  変数関数  $x_i(y_1, \dots, y_m)$  の全微分  $dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$  とみなせば、微分形式における座標変換が完了するということになる. この意味で、全微分における個々の記号  $dx_i$  は同時に関数  $x_i$  の全微分とみなせる.

さて、先ほども見たように、このように定義した微分 1 形式の引き戻しについて

$$d(T^* f) = T^*(df)$$

が成り立つ. これらを拡張して、一般の微分  $p$  形式の引き戻しを定義する. また、上の例では簡単のため座標変換を与える写像  $T$  をユークリッド空間全体からの写像としたが、偏微分や線積分は局所的なものであるからこれまで通りその開集合に話を制限しても何ら問題はない.

**Definition 2.10** (微分形式の引き戻し).  $U$  を  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合、 $V$  を  $m$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^m$  の開集合とし、 $T : V \rightarrow U$  を  $C^\infty$  級写像とする. このとき、 $U$  上の微分  $p$  形式

$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  の  $T$  による引き戻し (pull-back)  $T^*\alpha$  を,

$$T^*\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (f_{i_1 \dots i_p} \circ T) dT_{i_1} \wedge \dots \wedge dT_{i_p}$$

と定義する. ただし,  $dT_i$  は  $T_i$  の全微分  $\sum_{j=1}^m \frac{\partial T_i}{\partial y_j} dy_j$  である. 引き戻しは和と定数倍を保つから, これは

$$T^* : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(V)$$

という線形写像である.

そして, この引き戻しについて, 次が成り立つ.

**Proposition 2.11.**  $T : V \rightarrow U$  と  $U$  上の任意の微分  $p$  形式  $\alpha$  に対して,

$$d(T^*\alpha) = T^*(d\alpha)$$

が成り立つ.

*Proof.*  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  とすると,

$$\begin{aligned} d(T^*\alpha) &= d \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} (f_{i_1 \dots i_p} \circ T) dT_{i_1} \wedge \dots \wedge dT_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} d(f_{i_1 \dots i_p} \circ T) dT_{i_1} \wedge \dots \wedge dT_{i_p} \\ &= T^* \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= T^*(d\alpha) \end{aligned}$$

となるのでよい. □

これは  $T^* \circ d^p = d^p \circ T^* : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(V)$  とも表現できる. 一方, 微分形式の外積についても, 次が成り立つ. 定義から比較的簡単にるので証明は略.

**Proposition 2.12.**  $U$  上の微分  $p$  形式  $\alpha$  と微分  $q$  形式  $\beta$  と  $C^\infty$  級写像  $T : V \rightarrow U$  について,

$$T^*(\alpha \wedge \beta) = (T^*\alpha) \wedge (T^*\beta)$$

が成り立つ.

また,  $T$  にあたる写像が複数ある場合, 写像の合成による引き戻しは, それぞれの写像での引き戻しを合成したものと等しい:

**Proposition 2.13.**  $U$  上の微分  $p$  形式  $\alpha$  と  $C^\infty$  級写像  $T : V \rightarrow U, S : W \rightarrow U$  について,

$$(T \circ S)^*\alpha = S^*(T^*\alpha)$$

が成り立つ.

これも単純な式変形なので証明略. これは  $(T \circ S)^* = S^* \circ T^* : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(W)$  とも表現できる. ここで順序が入れ替わっているあたりに「引き戻し」の性質が見えている.

さて, ここで線積分について以前考えた積分との整合性を見てみよう. ここでまず, 微分  $p$  形式の積分は何らかの  $C^\infty$  級写像  $\kappa : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$  に沿って行われるものであったが, この  $\kappa$  によって微分  $p$  形式  $\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$  を引き戻してみると,  $p$  次元直方体  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$  上の微分  $p$  形式

$$\kappa^* \alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \dots i_p}(\kappa(t_1, \dots, t_p)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \kappa_{i_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p$$

が得られる (ここで  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$  の座標を  $t_1, \dots, t_p$  とした). これを再び微分  $p$  形式の積分の定義 (Definition 2.7) と見比べてみると,

$$\int_{\kappa} \alpha = \int_{\text{id}} \kappa^* \alpha$$

であることが分かる (id は  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$  の自身への恒等写像). これを用いると, 次が簡単に言える.

**Proposition 2.14.**  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$ ,  $\mathbb{R}^m$  の開集合  $V$ ,  $C^\infty$  級写像  $T : V \rightarrow U$  と  $\kappa : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \rightarrow V$ ,  $U$  上の微分  $p$  形式  $\alpha$  について,

$$\int_{T \circ \kappa} \alpha = \int_{\kappa} T^* \alpha$$

が成り立つ.

*Proof.*

$$\int_{T \circ \kappa} \alpha = \int_{\text{id}} (T \circ \kappa)^* \alpha = \int_{\text{id}} \kappa^* (T^* \alpha) = \int_{\kappa} T^* \alpha$$

よりよい. 2 番目の等号では Proposition 2.13 を用いた.

□

このようにして, 空間の開集合の間の  $C^\infty$  級写像に対して, 外微分や積分と整合性のある引き戻しという写像が微分形式の空間の間に定義できることが分かった. これによって特に, 微分形式を考えることによって, 「座標系によらない微分積分」のようなものが展開できることになる. これは, ユークリッド空間の開集合としては表せないような「図形」(多様体) 上の微積分学を展開する上で重要な指標となる.

## 2.4 ホッジのスター作用素

$0 \leq p \leq n$  に対して微分  $p$  形式を考えると, 外積の計算規則から,  ${}_n C_p$  個の項についての和をとれば十分なのであった. これは言うてみれば  $\Omega^p(U)$  は  ${}_n C_p$  元からなる基底を持つということである. ところで,  ${}_n C_p = {}_n C_{n-p}$  が成り立つから,  $\Omega^p(U)$  と  $\Omega^{n-p}(U)$  の基底の数は等しく, 何らかの同型で自然に結ばれるであろうと予想される.

**Definition 2.15** (ホッジのスター作用素).  $\Omega^p(U)$  から  $\Omega^{n-p}(U)$  への線形写像  $*$  を,

$$*(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}) = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p} \end{pmatrix} x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_{n-p}}$$

により定まるものとする。ただし、 $i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_{n-p}, \{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p}\} = \{1, \dots, n\}$  であるとし、 $\text{sgn}$  は置換の符号である。これはホッジのスター作用素と呼ばれる。

ここで、上では  $i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_{n-p}$  の場合に制限したが、その他の場合でも置換の符号  $\text{sgn}$  がうまく効いて上の定義とうまく合致することが分かる。

先ほども述べた通り  $*$  は同型写像であり、また  $* \circ *$  は自身への  $(-1)^{p(n-p)} (= \text{sgn} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p & j_1 & \dots & j_{n-p} \\ j_1 & \dots & j_{n-p} & i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix})$  倍写像である。

この  $*$  は、

$$(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}) \wedge *(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}) = 1 \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n$$

となるように定義してある。これは、 $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n, 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$  について

$$\begin{aligned} (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}) \wedge *(x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_p}) &= \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_p j_p} \\ &= \begin{cases} 1 & i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つことを言っており、 $\alpha \wedge *\beta$  が、 $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} (1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$  を正規直交基底とする  $\alpha$  と  $\beta$  の「内積」のようなものを与えることを予想させる（できあがるのは実数ではなく微分  $n$  形式（係数は関数）なので通常の意味での内積ではない）\*2。

さて、微分形式の外微分は、 $\Omega^p(U)$  から  $\Omega^{p+1}(U)$  への線形写像であった。一方、スター作用素は微分  $p$  形式を微分  $n-p$  形式に写すのであるが、微分  $n-p$  形式を外微分すれば微分  $n-(p-1)$  形式ができるので、それをまたスター作用素で戻してやれば、 $\Omega^p(U)$  から  $\Omega^{p-1}(U)$  への線形写像が得られる。実際にはこれに符号をつけて、次のように定義する。

**Definition 2.16** (余微分). 線形写像の合成

$$(-1)^{n(p+1)+1} (* \circ d \circ *) : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$$

を余微分 (codifferential) と呼び、 $\delta$  と書く。 $\Omega^p(U)$  からの写像であることを強調したい場合には  $\delta^p$  と書く。

ここで、一般に微分すると情報量が落ちることからも分かるように、余微分と外微分が互いに逆を与えて同型になるというようなことはない。

余微分も、外微分同様、二つ合成すると 0 になる。

**Proposition 2.17.** 任意の微分形式  $\alpha$  に対して、 $\delta(\delta\alpha) = 0$  が成り立つ。

*Proof.*  $\delta \circ \delta = (-1)^n * \circ d \circ * \circ d \circ *$  であるが、 $* \circ * = (-1)^{p(n-p)} \text{id}$  であるから、 $\delta \circ \delta = (-1)^{n+p(n-p)} * \circ d \circ d \circ *$  であり、 $d \circ d = 0$  であるのでこれは零写像。

□

\*2 ただし、内積は、 $x_1, \dots, x_n$  のような「座標軸」が定まっているならばとりあえず与えることができるが、それは任意の  $C^\infty$  級写像での座標変換で不変なわけではもちろんない。よって、この「内積」のようなものやそれをたよりに定義されたホッジのスター作用素は、前項で外微分と積分について見られたような、「任意の座標変換で不変」という性質は持ち得ないと予想される。逆に言えば、考えている空間が、「任意の  $C^\infty$  級写像での座標変換」までは許さないような、さらなる構造を持っている必要がある。今のところ考えているのは  $\mathbb{R}^n$  とその開集合であるから、とりあえずある一つの座標系を与えることは出来、つまり「内積」を定める方法は少なくとも一通りは存在するのだから、この「内積」やホッジのスター作用素を話題にしている時には、微分形式のみを話題にしている時よりも強い条件、つまり、座標変換は  $C^\infty$  級写像であるのみならず、内積を保つ という性質ももっているという条件が課せられると言える。

このことから、余微分からも複体

$$\mathbf{0} \rightarrow \Omega^n(U) \xrightarrow{\delta^n} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \dots \xrightarrow{\delta^2} \Omega^1(U) \xrightarrow{\delta^1} \Omega^0(U) \rightarrow \mathbf{0}$$

が得られることが分かる。

最後にラプラシアン的一般化にあたるものを定義する。ここでは便宜上一般的な定義とは符号を変えているので注意。

**Definition 2.18.**  $\Omega^p(U)$  から自身への線形写像  $-(d\delta + \delta d) : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(U)$  をラプラシアン (Laplacian)<sup>\*3</sup>と呼び、 $\Delta$  と書く<sup>\*4</sup>。

$\Delta\alpha = 0$  となる微分形式  $\alpha$  を調和形式 (harmonic form) と呼ぶ。調和  $p$  形式全体の集合を  $\mathbf{H}^p$  と書く。これは  $\Omega^p(U)$  の部分線形空間であり、また定義から、 $\mathbf{H}^p \subset \text{Ker}(d^p) \cap \text{Ker}(\delta^p)$  となっている。

### 3 3次元の場合

さて、ここまでいくつかの概念を定義してきたが、3次元の場合、これらの概念が、馴染み深いベクトル解析の概念とどのように対応しているのかを見てみる。

まず、次元が3なので、微分  $p$  形式 ( $p \geq 4$ ) は全部0である。そして、微分  $p$  形式 ( $0 \leq p \leq 3$ ) はそれぞれ、

- 微分0形式 :  $f$  (関数)
- 微分1形式 :  $f_x dx + f_y dy + f_z dz$
- 微分2形式 :  $f_{xy} dx \wedge dy + f_{xz} dx \wedge dz + f_{yz} dy \wedge dz$
- 微分3形式 :  $f_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz$

と表現できる。成分の数からしても微分0形式と微分3形式がスカラー関数、微分1形式と微分2形式がベクトル値関数とみなされるわけだが、これらのそれぞれを結びつけるホッジのスター作用素を見てみよう。ここで、 $* \circ * = (-1)^{p(n-p)} \text{id}$  だが<sup>3</sup>、 $n = 3$  の時  $p(n-p)$  は偶数なのでいつでも  $* \circ * = \text{id}$  であり、スター作用素同士は互いに逆を与える。

$$\begin{aligned} * : \Omega^0 &\rightarrow \Omega^3; \\ f &\mapsto f dx \wedge dy \wedge dz \\ * : \Omega^1 &\rightarrow \Omega^2; \\ f_x dx + f_y dy + f_z dz &\mapsto f_x dy \wedge dz + f_y dz \wedge dx + f_z dx \wedge dy \\ * : \Omega^2 &\rightarrow \Omega^1; \\ f_{xy} dx \wedge dy + f_{xz} dx \wedge dz + f_{yz} dy \wedge dz &\mapsto f_{xy} dz - f_{xz} dy + f_{yz} dx \\ * : \Omega^3 &\rightarrow \Omega^0; \\ f_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz &\mapsto f_{xyz} \end{aligned}$$

さて、とりあえずスカラー関数を微分0形式、ベクトル値関数を微分1形式と同一視しよう：

$$f \leftrightarrow f \in \Omega^0 \qquad \mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) \leftrightarrow f_x dx + f_y dy + f_z dz \in \Omega^1.$$

<sup>\*3</sup> ラプラス作用素 (Laplace operator), ラプラス=ドラーム作用素 (Laplace-de Rham operator) などとも呼ばれる。

<sup>\*4</sup> 通常は  $\Delta = d\delta + \delta d$  で定義するが、後に3次元の場合に通常のラプラシアンと整合性を持たせるために符号を入れ替えている。ここだけの定義である。

そして、場合に応じて、上のスター作用素を用いてそれぞれスカラー関数を微分3形式、ベクトル値関数を微分2形式とも同一視することにする。ここで、微分2形式の表記は、

$$f_{yz}dy \wedge dz + f_{zx}dz \wedge dx + f_{xy}dx \wedge dy$$

の形にしておいたほうが都合がよいのでそうする。

この設定のもとで微分形式の諸概念がスカラー関数やベクトル値関数のどの概念と結びつくのかを見てみる。まずは外微分からであるが、この通り、回転や発散などの作用の対象を微分形式として捉えることでかなり見通しがよくなる(と思う)。

**Example 3.1** (外微分). 微分0形式の外微分は勾配に対応している:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad \longleftrightarrow \quad \nabla f = \text{grad}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

微分1形式の外微分は回転に対応している:

$$\begin{aligned} d(f_x dx + f_y dy + f_z dz) &= \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{f} = \text{rot} \mathbf{f} = \text{curl} \mathbf{f} &= \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

微分2形式の外微分は発散に対応している:

$$\begin{aligned} d(f_x dy \wedge dz + f_y dz \wedge dx + f_z dx \wedge dy) &= \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = \text{div} \mathbf{f} &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

これは、ドラーム複体が次のように書けると言い換えることもできる(スター作用素は省略している)。

$$0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1 \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2 \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3 \rightarrow 0$$

これと、 $d \circ d = 0$ という外微分について一般に成り立つ性質 (Proposition 2.6) から、直ちに次が従う。

**Corollary 3.2** ( $d \circ d = 0$  となること).

$$\text{rot}(\text{grad}f) = \mathbf{0}, \quad \text{div}(\text{rot} \mathbf{f}) = 0$$

が任意のスカラー関数  $f$ , ベクトル値関数  $\mathbf{f}$  に対して成り立つ。

さて、証明はしなかったが、ポアンカレの補題 (Theorem 2.9) というのがあった。それは、ユークリッド空間の星形開集合 (ユークリッド空間自体もそうである) 上の微分  $p$  形式  $\alpha$  ( $p > 0$ ) について、 $d\alpha = 0$  ならば、 $\alpha = d\beta$  となる  $\beta$  が存在することを主張するものである。ここで3次元の場合の対応物を考えると、これはスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルの存在に対応していることが分かる。

**Example 3.3** (ポアンカレの補題). ベクトル値関数  $\mathbb{B}$  が  $\text{div} \mathbb{B} = 0$  を満たすならば、 $\text{rot} \mathbb{A} = \mathbb{B}$  となるベクトル値関数  $\mathbb{A}$  が存在する (ベクトルポテンシャルの存在).

ベクトル値関数  $\mathbb{E}$  が  $\text{rot} \mathbb{E} = \mathbf{0}$  を満たすならば、 $\text{grad} \phi = \mathbb{E}$  となるスカラー関数  $\phi$  が存在する (スカラーポテンシャルの存在).

次は積分である.

**Example 3.4** (線積分). ベクトル値関数  $\mathbf{F}$  の曲線  $l$  に沿った線積分は,

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

と書かれる. ここで,  $d\mathbf{l}$  は, 曲線に沿った微小部分を向きも含めて考えたものだが, これをベクトル  $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$  のように書いて上の内積を計算すれば, 上の積分はまさに

$$\int_l F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

という微分1形式の線積分になるし, 実際, 計算の実行においては, 曲線  $l$  をあるパラメータ (ここでは  $u$  で取る) を用いて表し, 微小部分を

$$d\mathbf{l} = \left( \frac{dx}{du} du, \frac{dy}{du} du, \frac{dz}{du} du \right)$$

と表して, 積分を

$$\int_{u_0}^{u_1} \left( F_x \frac{dx}{du} + F_y \frac{dy}{du} + F_z \frac{dz}{du} \right) du$$

として計算するのであるから, まさに微分1形式の線積分である (Definition 1.2 を参照せよ).

**Example 3.5** (面積分). ベクトル値関数  $\mathbf{E}$  の曲面  $S$  上での面積分は,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

と書かれる.  $\mathbf{n}$  は  $S$  の法線ベクトルである.

ここで, 曲面  $S$  は二つのパラメータ  $(u, v)$  でパラメータ付けられている, つまり,  $S$  は  $u, v$  平面の部分集合から  $\mathbb{R}^3$  への ( $C^\infty$  級) 写像\*5の像であるとする. この時この写像を

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

と書くことにすると, 面積要素  $dS$  は

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

で与えられる式である\*6. ここで右辺の中身は空間ベクトルの外積であり,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  などである.

ところで,  $S$  上の点  $P$  での接平面とは,  $P$  を始点とする2つの位置ベクトル

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

\*5 この仮定はもっと弱くできる.

\*6 ここや以下の議論は [4] など参照.

の張る平面のことであり、 $S$ の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は、これらに垂直なベクトルであるから、空間ベクトルの外積を用いて

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

で与えられることになる。パラメータ  $(u, v)$  を決めたときのこれらの  $\mathbf{n}$  と  $dS$  の表式から、はじめ書いた面積分は、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \mathbf{E} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \, dudv$$

という  $u, v$  平面での重積分に書き換わる ( $\mathbb{R}^3$  内の曲面と  $u, v$  平面の部分集合を同一視している)。これは成分ごとに書けば、

$$\begin{aligned} & \int_S \left( E_x \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + E_y \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + E_z \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) \, dudv \\ &= \int_S \left( E_x \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} + E_y \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} + E_z \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right) \, dudv \end{aligned}$$

となり、微分2形式の積分

$$\int_S E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy$$

と一致する (Definition 1.10 を参照せよ)。

また、スカラー関数の体積積分がそれを微分3形式とみなした時の微分形式の積分と対応していることも明らかであろう。

このように、線積分と面積分をベクトル値関数に対して (従来のように) 定義されるものと見るよりも、線積分されるものと面積分されるものを、微分1形式、微分2形式として区別してやることで、かえってこれらが同じ“微分形式の積分”の例として統一的に扱われうるものだということが浮かび上がってくる。

さて、次に、証明はしないが、ベクトル解析でとてもよく用いられるストークスの回転定理とガウスの発散定理を微分形式の言葉で書き起こしてみよう。

**Example 3.6** (ストークスの回転定理). ストークスの回転定理は以下のように表現される。

ベクトル関数  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  の閉じた曲線  $L$  上での一周積分は、 $L$  を縁とする任意の曲面  $S$  上での面積分によって、以下のように表される。

$$\oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS$$

法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  は、 $L$  の線積分の回る向きに右ねじを巻いたときに進む向きをとるものとする。[1]

さて、まず曲線  $L$  のことを曲面  $S$  の境界という意味で  $\partial S$  と表すことにしよう。ここで境界での線積分の向きは上記の法線ベクトルの取り方 (曲面の表裏) と整合性があるように取るものとする。そして先ほど見た通りに線積分と面積分を微分形式の言葉で言い換え、また回転  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$  は微分1形式の外微分で言い換える。今、微分1形式  $F_x dx + F_y dy + F_z dz$  を  $F$  と書くことにしよう。すると、ストークスの回転定理の主張は、

$$\int_{\partial S} F = \int_S dF$$

ととても簡潔になる。周回積分の記号は特に意味がないので見やすいように外した。

**Example 3.7** (ガウスの発散定理). 一方, ガウスの発散定理は以下のように書かれる.

ベクトル関数  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  のダイバージェンス  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$  のある空間領域  $V$  内での体積積分は, その領域の表面  $S = \partial V$  上での面積分によって与えられ, 以下の等式が成り立つ.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$$

ただし  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  は表面  $S = \partial V$  上の外向き法線ベクトルである. [1]

ここでも, ダイバージェンスを微分 2 形式の外微分で言い換えてこれを書き換える. 今微分 2 形式  $E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy$  を  $E$  と書くことにすると, ガウスの発散定理の主張は,

$$\int_{\partial V} E = \int_V dE$$

とこれもとても簡潔になる. ここでストークスの例と比べやすいように等号の前後を入れ替えた.

ストークスの回転定理とガウスの発散定理は共に, 流体が流れる様子を想像するなどすれば直観的に分かるものではあったが, 上のように微分形式の言葉で書いてみると, 実は全く同じ形の主張だと言えることが分かる. これはもっと一般の次元のユークリッド空間の中での任意の微分  $p$  形式の  $p$  次元超曲面での積分などについても成り立つ性質であり, 一般の場合もストークスの定理と呼ばれている.

最後に余微分とラプラシアンについて少し見ておこう.

余微分は,  $\delta = (-1)^{n(p+1)+1}(* \circ d \circ *)$  で定義されるのであった. 今  $n = 3$  だから  $\delta = (-1)^p(* \circ d \circ *)$  である.

よって, 余微分は, 微分 1 形式, 微分 3 形式に対しては, それぞれベクトル解析での発散, 勾配の  $(-1)$  倍, 微分 2 形式に対しては回転 (の 1 倍) である.

微分 0 形式  $f$  にラプラシアンを作用させたものを計算しよう. 微分 0 形式の余微分は微分  $(-1)$  形式であって 0 だから,  $-d\delta$  の項は消えて,

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\delta df = -\delta \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \\ &= * \left( d \left( * \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \right) \right) \\ &= * \left( d \left( \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy \right) \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

となり, 通常のラプラシアンと一致する\*7. また, これは通常のベクトル解析の用語で言うと, 勾配を取って発散を取っていると言えるから,

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$$

であって, こうすれば普通のラプラシアンの書き方である.

次に, 微分 1 形式  $f_x dx + f_y dy + f_z dz$  へラプラシアンを作用させてみよう. クロネッカーのデルタやレヴィチビタ記号を使えばもっと簡単に書けるが一応展開した.

\*7 前述のとおり, 一般には微分形式に対するラプラシアンはこれと符号を逆にして定義するので, 通常のラプラシアンと符号が違っているが,  $\Delta f = 0$  という方程式としては同値なのでまあよしとする (一般によしとしてよいものなのかどうかはよく分からない)

$$\begin{aligned}
& \Delta (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \\
&= -(d\delta + \delta d)(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \\
&= -(-1)d(* (d(* (f_x dx + f_y dy + f_z dz)))) - *(d(* (d(f_x dx + f_y dy + f_z dz)))) \\
&= d\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) - *\left(d\left(\left(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right)dz\right)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)dz\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right)\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y}\right)\right)dy \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\right)dz \\
&= \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2}\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2}\right)dy + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)dz
\end{aligned}$$

このように、結局各成分に通常のラプラシアンを作用させた結果になっている。各成分へのラプラシアンの作用も同じ記号で書くことが普通であるから、ここでもちゃんとラプラシアンに対応しているということになる。また、微分形式のそれぞれの外微分を勾配、回転、発散として捉えると、上で行った計算は、よく用いられる公式

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

の証明とびったり対応する。

以上見てきた対応を元に、次の section でマクスウェル方程式を書き換えてみる。

## 4 マクスウェル方程式の書き換え

### 4.1 書き換え

以下、ベクトル場は  $\mathbf{B}$  や  $\mathbf{E}$  などの太字で、対応する微分 1 形式や 2 形式は  $\mathcal{B}$  や  $\mathcal{E}$  などのカリグラフィーフォントで表記することにする。

また、ここではとりあえず SI 単位系を用いる。また主に真空中のマクスウェル方程式を考えるが、誘電体や磁性体でも通用する形でまず書いてみる。(微分型の) マクスウェル方程式は以下の 4 式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{D}$  は電束密度、 $\mathbf{B}$  は磁束密度、 $\mathbf{E}$  は電場、 $\mathbf{H}$  は磁場、 $\rho$  は電荷密度、 $\mathbf{j}$  は電流密度である。

そして、通常はこの形ではなく、真空中で成り立つ等式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (6)$$

を用いて得られる  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  のみを用いた式がマクスウェル方程式として提示される。ここで  $\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $\mu_0$  は真空の透磁率である。

しかし、この等式はただの定数倍よりももう少し強いことを言っていることが分かる。それは微分形式に書き換えると顕著なのでまず書き換えてみる。上で示したマクスウェル方程式はいわゆる微分型のマクスウェルの方程式であるが、積分型の方程式も意識しながら、それぞれの物理量をどの次数の微分形式で置き換えたらよいかを考えてみる。

$\rho$  は体積積分を受けるから、微分 3 形式  $\rho = \rho \, dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3$  を対応させる。

$\mathbf{D}$  や  $\mathbf{B}$  や  $\mathbf{j}$  は面積分を受けるから、微分 2 形式  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{J}$  を、それぞれ  $\mathcal{D} = D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy$  のようにして対応させる。

$\mathbf{E}$  や  $\mathbf{H}$  は線積分を受けるから、微分 1 形式  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  を、それぞれ  $\mathcal{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$  のようにして対応させる。

こうすると、マクスウェル方程式は次のように書き換えられる。

$$d\mathcal{D} = \rho \tag{7}$$

$$d\mathcal{B} = 0 \tag{8}$$

$$d\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} \tag{9}$$

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D} + \mathcal{J} \tag{10}$$

(ただし、 $\mathcal{E}, \mathcal{H} \in \Omega^1, \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{J} \in \Omega^2, \rho \in \Omega^3$ )

ほとんど書き換わっていないが、左辺がすべて外微分で書き換わってすっきりしたし、それぞれの物理量の数学的な所属もよりはっきりとした。

ここで、先ほどの真空中で成り立つ等式は、単に定数倍というだけでなく、微分 1 形式と微分 2 形式を結びつける等式でもあったことが分かる。すなわち、この等式の定式化にはスター作用素が必要であり、もっと言えば、空間に内積のようなものが定まっている必要があることになる。先ほどの等式を微分形式に対して書き直せば次のようになるであろう。

$$\mathcal{D} = \epsilon_0(*\mathcal{E}) \tag{11}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0}(*\mathcal{B}) \tag{12}$$

ここで  $*$  はホッジのスター作用素である。

さて、上で何の断りもなく微分形式の時間微分を書いたが、とりあえず今のところ、微分形式の各項の関数は時間  $t$  も変数に持っており、 $t$  についても  $C^\infty$  級であるとしておく。

このようにして書き換わったマクスウェル方程式をちよつとずついじってみる。

まず、電磁波の波動方程式を導こう。

## 4.2 波動方程式

マクスウェル方程式 (7)-(10) において、 $\rho = 0$ ,  $\mathcal{J} = 0$  とし、また関係式 (11), (12) を代入して少し整理すると、以下ようになる。

$$\epsilon_0 d(*\mathcal{E}) = 0 \quad (13)$$

$$d\mathcal{B} = 0 \quad (14)$$

$$d\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} \quad (15)$$

$$\frac{1}{\mu_0}d(*\mathcal{B}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(*\mathcal{E}) \quad (16)$$

\* $\circ$ \* = id だから, (16) は以下のようになる:

$$\frac{1}{\mu_0}*(d(*\mathcal{B})) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}. \quad (17)$$

$\frac{\partial}{\partial t}$  は微分形式の演算と関係ないので \* や d と可換であることに注意. ここで両辺にまた外微分 d を作用させて, 右辺の d $\mathcal{E}$  に (15) を代入して整理すれば,

$$d(*d(*\mathcal{B})) = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} \quad (18)$$

となる.  $\mathcal{B}$  は微分 2 形式だから,  $*d(*\mathcal{B}) = (-1)^2\delta\mathcal{B} = \delta\mathcal{B}$  である. それと,  $d\delta = -\Delta - \delta d$  に注意すれば,

$$\Delta\mathcal{B} + \delta d\mathcal{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} \quad (19)$$

が得られる. (14) から,  $d\mathcal{B} = 0$  だから, 結局,

$$\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathcal{B} = 0 \quad (20)$$

が得られる. これは波動方程式に他ならない.

### 4.3 ポテンシャル

まず, ポアンカレの補題 (Theorem 2.9) を (少し表現を変えて) 再掲する.

**Theorem 4.1** (ポアンカレの補題 (再掲)).  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の星形開集合  $U$  上の微分形式について, 微分  $p$  形式  $\alpha$  ( $1 \leq p \leq n$ ) が  $d\alpha = 0$  を満たすならば,  $d\beta = \alpha$  となる微分  $p-1$  形式  $\beta$  が存在する.

ユークリッド空間自身も星形開集合だから, これは今考えている  $\mathbb{R}^3$  上の微分形式にも適応できることになる. ここで, (8) に注目すれば, 以下のことが分かる.

**Corollary 4.2** (ベクトルポテンシャルの存在).  $d\mathcal{A} = \mathcal{B}$  を満たす微分 1 形式  $\mathcal{A}$  が存在する.

また次のことも分かる.

**Corollary 4.3** (ベクトルポテンシャルの任意性). ベクトルポテンシャルには, あるスカラー関数の全微分の分の自由度がある. すなわち, 微分 1 形式  $\mathcal{A}$  が  $d\mathcal{A} = \mathcal{B}$  を満たすとき, ある微分 0 形式  $f$  を使って  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + df$  として定義した微分 1 形式  $\mathcal{A}'$  も  $d\mathcal{A}' = \mathcal{B}$  を満たす.

逆に, 自由度はこのようなものに限られる. すなわち, 別の微分 1 形式  $\mathcal{X}$  が  $d\mathcal{X} = \mathcal{B}$  を満たすならば, その差はある微分 0 形式  $g$  を用いて  $\mathcal{A} - \mathcal{X} = dg$  と書ける.

*Proof.* 前半は,  $d \circ d = 0$  から,  $dA' = dA + dd f = dA = \mathcal{B}$  となるのでよい.

後半は, 微分 1 形式  $\mathcal{A} - \mathcal{X}$  が  $d(\mathcal{A} - \mathcal{X}) = 0$  を満たすので, ポアンカレの補題から, ある微分 0 形式  $g$  が存在して  $dg = \mathcal{A} - \mathcal{X}$  となることが示されるのでよい.

□

このように, ベクトルポテンシャルの存在などを論じるときには, それぞれの量を微分形式として捉えると非常に議論が統一的になって簡単になる.

スカラーポテンシャルも同じように存在が証明できる.

**Corollary 4.4** (スカラーポテンシャルの存在). Corollary 4.2 により存在が保証される微分 1 形式  $\mathcal{A}$  を一つ固定する. このとき,

$$\mathcal{E} = -d\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}$$

を満たす微分 0 形式  $\phi$  が存在する.

*Proof.* 微分 1 形式  $\mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}$  は, マクスウェル方程式 (9) より,

$$d\left(\mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}\right) = d\mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} = 0$$

を満たすから, ポアンカレの補題から,  $d\phi = -\left(\mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}\right)$  となる  $\phi \in \Omega^0$  が存在するのでよい.

□

また,  $\mathcal{A}$  を固定したときの  $\phi$  の任意性は, 全微分が一致するもの同士だから, ちょうど定数の差である. つぎに  $\mathcal{A}$  を他のものに取り替えたときにどうなるかを考えると, 容易に次が分かる.

**Corollary 4.5** (ベクトルポテンシャルの任意性からの要請). ベクトルポテンシャル  $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + df$  に取り替えたときは,  $\phi$  を  $\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}f$  に取り替えれば, Corollary 4.4 と同じ式で  $\mathcal{E}$  が得られる.

*Proof.*

$$-d\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}' = -d\left(\phi - \frac{\partial}{\partial t}f\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{A} + df) = -d\phi + \frac{\partial}{\partial t}df - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A} - \frac{\partial}{\partial t}df = -d\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

よりよい.

□

#### 4.4 完全系列

さて, ここまでの議論を視覚化するために, ドラーム複体を線形空間と線形写像の列で書くやりかたを少し拡張して, 図式というものを導入する. これを導入するとマクスウェルのお家が建つのだが, その前にまず, 核や像といった概念を復習して, 複体, そして完全系列というものを定義する.

**Definition 4.6** (復習).  $f: X \rightarrow Y$  を線形写像とする.

このとき,  $X$  の部分集合  $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$  を  $f$  の核 (kernel) と言い,  $\text{Ker } f$  と書く.

また,  $Y$  の部分集合  $\{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$  を  $f$  の像 (image) と言い,  $\text{Im } f$  と書く.

核と像は和と定数倍で閉じている。すなわち、 $\text{Ker}f$  は  $X$  の部分線形空間であるし、 $\text{Im}f$  は  $Y$  の部分線形空間である。

単なる言い換えではあるが、 $x \in \text{Ker}f$  は  $f(x) = 0$  と同値であり、 $y \in \text{Im}f$  は “ある  $x$  が存在して  $y = f(x)$  となること” と同値である。

**Definition 4.7** (複体). 整数で添字付けられた線形空間の列  $\{X^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  と線形写像の列  $\{d_X^n : X^n \rightarrow X^{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が、各  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0$$

を満たすとき<sup>\*8</sup>、 $\{X^n, d_X^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を複体 (complex) と言う。複体を単に  $X$  で表すことも多い。また一つ一つの線形写像  $d_X^n$  は微分 (differential)、境界作用素 (boundary operator) などと呼ばれる。

次の例は微分形式のなす空間を導入したときにすでに述べていたものである。前にも述べた通り、複体は “2 つ行ったら 0 になる” 列である。

**Example 4.8** (ドラム複体). ユークリッド空間の開集合  $U$  に対し、 $U$  上の微分  $p$  形式全体のなす線形空間を  $\Omega^p(U)$  と書き、また微分  $p$  形式の外微分を  $d^p$  と書くことにする。ここで  $0 \leq p \leq n$  以外の  $p$  については  $\Omega^p(U) = \{0\}$  としておく<sup>\*9</sup>。すると、 $\{\Omega^p(U), d^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$  は複体になる。これはドラム複体 (de Rham complex) と呼ばれる。この複体を  $\Omega(U)$  と書くことにする。

この例のように、 $|n| \gg 0$  で  $X^n = 0$  となっている複体は有界 (bounded) であると言われる。通常有界なものしか考えない。

**Definition 4.9** (複体の射).  $X = \{X^n, d_X^n\}_{n \in \mathbb{Z}}, Y = \{Y^n, d_Y^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を複体とする。このとき、 $X$  から  $Y$  への複体の射 (morphism of complexes) とは、線形写像の列  $\{f^n : X^n \rightarrow Y^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  であって、各  $n$  に対して

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n$$

を満たすものである。

この概念はのちに図式を導入するとわかりやすくなる。

**Example 4.10.**  $U, W$  をそれぞれ何らかのユークリッド空間の開集合とし、 $f : U \rightarrow W$  を  $C^\infty$  級写像とする。このとき、 $W$  上の微分  $p$  形式  $\alpha$  に対して、その  $f$  による引き戻し  $f^*\alpha \in \Omega^p(U)$  が定義された (Definition 2.10)。そして、それは外微分と可換であった (Proposition 2.11)。

よって、 $f : U \rightarrow W$  があるとき、それによる微分形式の引き戻しは、ドラム複体の間の複体の射

$$f^* : \Omega(W) \rightarrow \Omega(U)$$

をなす。

**Example 4.11.** 先ほどマクスウェル方程式を考えたときのように、各微分形式の係数となっている関数は  $t$  成分も持っていて  $t$  に関しても  $C^\infty$  級であるとする。このとき、時間微分は微分形式の演算とは全く独立だ

<sup>\*8</sup> ここで右辺の 0 は零写像を表す 0 である。

<sup>\*9</sup>  $\{0\}$  からある線形空間への線形写像や、ある線形空間から  $\{0\}$  への線形写像は、前者は線形写像は零元を零元に送ることから一意に定まるし、後者はそもそも行き先が 1 元集合なので一意に定まる。つまり、有限個の線形空間からなる列が複体の条件を満たしているときに両側に 0 を足していく方法は一意。

から,  $\frac{\partial}{\partial t} \circ d = d \circ \frac{\partial}{\partial t}$  が成り立つ. よって, 時間微分は複体の射

$$\frac{\partial}{\partial t} : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$$

を定める.

複体は “2つ行ったら 0 になる” ものであったが, それは  $\text{Im } d^n \subset \text{Ker } d^{n+1}$  と同値である. これの逆の包含関係も条件に加えたのが完全系列である.

**Definition 4.12** (完全系列). 線形空間  $X, Y, Z$  と線形写像  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  に対し, 列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が完全系列 (exact sequence) であるとは,  $Y$  の部分線形空間の包含関係において

$$\text{Im } f = \text{Ker } g$$

が成り立つことを言う.

4つ以上の線形空間 (と線形写像) の列

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$$

が完全系列であるとは, その3つの線形空間からなる各部分が完全系列になっていることであると定義する.

**Example 4.13** (星形開集合のドラム複体). ポアンカレの補題は, 星形開集合  $U$  上の微分  $p$  形式  $\alpha$  ( $1 \leq p \leq n$ ) について,  $\alpha \in \text{Ker } d^p$  と  $\alpha \in \text{Im } d^{p-1}$  が同値であるという主張である. すなわち,  $\Omega^p(U)$  の部分線形空間について,  $\text{Ker } d^p = \text{Im } d^{p-1}$  が成り立っている. よって,

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(U) \rightarrow 0$$

は完全系列になる.

また,  $\text{Ker } d^0$  とは何かを考えてみると, これはすなわち全微分が 0 になる (多変数) 関数であり, これは定数関数しかない. これを参考にすると,

$$0 \rightarrow \mathbb{R}(U) \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(U) \rightarrow 0$$

は完全系列になることが分かる (各自確かめよ). ここで,  $\mathbb{R}(U)$  は  $U$  上の定数関数のなす線形空間であり,  $\mathbb{R}(U) \rightarrow \Omega^0(U)$  は包含写像である.

## 参考文献

- [1] 横山順一, 電磁気学 (講談社基礎物理学シリーズ 4), 講談社, 2009.
- [2] 阿原一志, 考える線形代数 増補版, 数学書房, 2013.
- [3] 坪井俊, 幾何学 III 微分形式 (大学数学の入門 6), 東京大学出版会, 2008.
- [4] 難波誠, 微分積分学, 裳華房, 1996.