“図形” の収束

O.F.

2014 年 9 月 27 日

概要

駿台の夏の実践模試で，「論証不適切，直観に頼らないギロンが必要」と 0 点をつけられてしまって反省して作ったプリント．有界閉集合全体に距離を入れるという発想やその定義や補題は完全によそからパクってきたものだが，今見返してもこういうのも面白いなと思った (2014/9/27 追記).

1 準備

定義 1. $\mathcal{K}$ を $\mathbb{R}^n$ の空でない有界閉集合全体とする．

$A \subset \mathbb{R}^n$ と $\epsilon > 0$ に対し，

$$A[\epsilon] := \{x \in \mathbb{R}^n | \exists y \in A, |x-y| \leq \epsilon\}$$

と定義する．

$K, L \in \mathcal{K}$ に対し，

$$d(K,L) := \inf\{\epsilon > 0 | K[\epsilon] \supset L, L[\epsilon] \supset K\}$$

と定義する．

補題 2. $A[\epsilon][\delta] \subset A[\epsilon+\delta]$ が成り立つ．

Proof. $x \in A[\epsilon][\delta]$ とすれば，$y \in A[\epsilon]$ があって $|x-y| \leq \delta$ とでき，またこの y に対して $z \in A$ があって $|y-z| \leq \epsilon$ とできる．よって，x に対して，$z \in A$ があって，

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq \epsilon + \delta$$

とできたのだから $x \in A[\epsilon+\delta]$. □

命題 3. d は $\mathcal{K}$ 上の距離である．

Proof. $d(K,K) = 0$，$d(K,L) = d(L,K)$ は明らか．

$d(K,L) = 0 \Rightarrow K = L$ を示す．

$x \in K \setminus L$ がとれたとする．$d(K,L) = 0$ より，どんな $\epsilon > 0$ をとっても $x \in K \subset L[\epsilon]$ が成り立つから，x のどんなに半径の小さい開球 $B_\epsilon(x)$ をとっても $B_\epsilon(x) \cap L = \emptyset$ とはできないから L が閉集合に矛盾．よってよい．

$d(K,M) \leq d(K,L) + d(L,M)$ を示す．

任意の $\epsilon > 0$ をとれば，$K \subset L[d(K,L)+\epsilon]$，$L \subset M[d(L,M)+\epsilon]$ が成り立つので，補題と合わせて，

$$K \subset M[d(L,M)+\epsilon][d(K,L)+\epsilon] \subset M[d(K,L)+d(L,M)+2\epsilon]$$

が成り立つ．同様に

$$M \subset K[d(K,L)+d(L,M)+2\epsilon]$$

も成り立つから，$d(K,M) \leq d(K,L)+d(L,M)+2\epsilon$ が分かり、$\epsilon > 0$ は任意だったから，$d(K,M) \leq d(K,L)+d(L,M)$ が分かる．

□

補題 4. $L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \dots$ を $\mathcal{K}$ の元とすると，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n \in \mathcal{K}$.

Proof. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n$ が有界な閉集合であることはよい．空でないことを示す．

もし $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n = \emptyset$ だとすると，

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n^c = \mathbb{R}^n \supset L_1$$

という開被覆がとれる．ここで，L_1 はコンパクトだから，ある $N \in \mathbb{N}$ があって，

$$L_1 \subset \bigcup_{1\le i\le N-1} L_i^c$$

とできるが，$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \dots$ だから，

$$L_N \subset L_1 \subset \bigcup_{1\le i\le N-1} L_i^c \subset L_N^c$$

となり，$L_N \neq \emptyset$ に矛盾．

□

補題 5. $K \in \mathcal{K}, \epsilon > 0$ とすれば，$K[\epsilon] \in \mathcal{K}$ である．

Proof. $K[\epsilon]$ が空でない有界集合であることは明らかなので，閉集合であることを示す．

$x \notin K[\epsilon]$ をとる．K はコンパクトだから，

$$K \to \mathbb{R}; y \mapsto |x-y|$$

という連続写像は最少値をもつ．その最少値を y_0 とする．x のとりかたから $|x-y_0| > \epsilon$ だから，$\delta := |x-y_0| - \epsilon > 0$ とすれば，x を中心とする半径 δ の開球を $B_\delta(x)$ とかけば $B_\delta(x) \cap K[\epsilon] = \emptyset$ となるので，$K[\epsilon]$ は閉集合．

□

補題 6. $\{K_n\}$ を $\mathcal{K}$ の *Cauchy* 列としたとき，

$$L_n := \overline{\bigcup_{j\ge n} K_j}$$

として $L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \dots$ なる列を作れば，これらは全て $\mathcal{K}$ の元である．

Proof. 空でない閉集合であることはよいので，有界であることを示す．

ある正の実数 a をとっておく．$\{K_n\}$ が Cauchy 列だから，ある $N \in \mathbb{N}$ があって，

$$j \ge N \Rightarrow d(K_j, K_N) < a$$

とできる．このとき，$j \ge N \Rightarrow K_j \subset K_N[a]$ が成り立っているから，任意の n について，

$$L_n = \overline{\bigcup_{j\ge n} K_j} \subset \overline{K_n \cup K_{n+1} \cup \dots \cup K_{N-1} \cup K_N[a]} = K_n \cup K_{n+1} \cup \dots \cup K_{N-1} \cup K_N[a]$$

が成り立つ．ここで，補題より $K_n[a]$ が閉集合であることを用いた．右辺は明らかに有界なので L_n も有界．

□

命題 7. $(\mathcal{K}, d)$ は完備距離空間となる．つまり，$\mathcal{K}$ の任意の *Cauchy* 列 $\{K_n\}$ は収束する．

Proof. Cauchy 列 $\{K_n\}$ に対して，先ほどの補題のように $\mathcal{K}$ の元の減少列 $L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \dots$ をとる．ここで，$L := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n$ とする．これは先ほどの補題から $\mathcal{K}$ の元．

このLが $\lim_{n\to\infty} K_n$ に等しいことを証明する．そうすれば L はいつでも構成できるから，$\lim_{n\to\infty} K_n$ はいつでも存在することになるのでよい．

任意の $\epsilon > 0$ をとる．このとき，$N \in \mathbb{N}$ があって，

$$j \geq N \Rightarrow L \subset K_j[\epsilon], K_j \subset L[\epsilon]$$

が成り立つことを示せば良い．

$\{K_n\}$ が Cauchy 列であることから，ある $N \in \mathbb{N}$ があって，$k_1, k_2 \geq N$ ならば $K_{k_1} \subset K_{k_2}[\epsilon]$ となるようにできるので，その N をとる．

ここで $j \geq N$ をとれば，

$$L \subset L_j = \overline{\bigcup_{i\geq j} K_i} \subset \overline{K_j[\epsilon]} = K_j[\epsilon]$$

となるのでこれで $L \subset K_j[\epsilon]$ とできた．

反対側の包含も作れることを示す．

先ほどの N と $j \geq N$ をとって，$x \in L_j$ とする．$i \geq j$ について $d(K_i, K_j) < \epsilon$ だから，各 $i \geq j$ に対して $x_i \in K_i$ をとって $|x_i - x| \leq \epsilon$ とできる．

ここに点列 $\{x_i\}_{i\geq j}$ があるが，これはコンパクト集合 L_j の中の点列なので，収束する部分列 $\{x_{i_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ がある．

ここで，$y := \lim_{m\to\infty} x_{i_m}$ とすると，まず

$$|x - y| = \lim_{m\to\infty} |x - x_{i_m}| \leq \epsilon$$

である．また任意の正整数 M に対しても十分大きな m をとれば $i_m \geq M$ と出来て，$\{x_{i_m}\}$ の m 番目以降は常に閉集合 L_M の元であるようにできるから，その極限である y も L_M の元で，これが任意の正整数 M について成り立つからつまり $y \in \bigcap_{M\in\mathbb{N}} L_M = L$ がわかる．

よってこれで，ϵ に対して $y \in L$ がとれて $|x - y| \leq \epsilon$ となるようにできたことになるから，$K_j \subset L[\epsilon]$ も成り立つ．よってこの N について成り立つのでよい．

□

系 8. $\{K_n\}$ を $\mathcal{K}$ の収束列とし，$\{x_n\}$ を各 n について $x_n \in K_n$ が成り立っているような $\mathbb{R}^n$ の収束列とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} x_n \in \lim_{n\to\infty} K_n$ が成り立つ．

Proof. 前命題での証明中の記号を導入すると，$\lim_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n$ である．今各 n について $x_n \in K_n$ だから，各 n について $m \geq n \Rightarrow x_m \in L_n$ が成り立っている．各 L_n は閉集合だから $\lim_{n\to\infty} x_n \in L_n$．これが任意の $n \in \mathbb{N}$ について成り立つので，$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n = \lim_{n\to\infty} K_n$．

□

2 問題

問題 9. $\mathcal{C}_n \subset \mathbb{R}^2$ を，

$$\mathcal{C}_n := \{(x, y) | x^n + y^n = 1,\ x, y \geq 0\}$$

で定義する．また $a > 0$ とする．

放物線 $y = ax^2$ のグラフと曲線 $\mathcal{C}_n$ の交点を $P_n \in \mathbb{R}^2$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．

これが例の問題 (少し改変した) であり，模試の講評には

> 中には，曲線 $x^n + y^n = 1$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分が $n \to \infty$ のとき，正方形の 2 辺に近づくとして極限を求めている人もいましたが，そもそも曲線が曲線に近づくとはどういう意味でしょうか？　このような答案を作った人はその意味を明確に出来なければいけない訳ですが，通常，高校数学ではこのような「近づく」という言葉の使い方をしませんから，その意味を説明できる受験生はいないはずです．つまり，この解答では「感覚的」で「説明不十分」という評価になります．

とあったりしていろいろ闇であった．

命題 10. この P_n は，

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right) & a > 1 \text{ のとき} \\ (1,1) & a = 1 \text{ のとき} \\ (1,a) & a < 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

にそれぞれ収束する．

Proof (略). $\mathcal{C}_n$ は端点を持つ曲線であり，これは明らかに有界閉集合なので，以前考えた $\mathcal{K}$ の元となっている．よって，$\lim_{n\to\infty} P_n$ は，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n$ 上の点である．

ここで，

$$\mathcal{C} := \{(x,y) | 0 \leq x, y \leq 1, x = 1 \vee y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

と定義する．ここで，$\mathcal{C}$ と放物線のグラフとの交点の座標はまさに

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right) & a > 1 \text{ のとき} \\ (1,1) & a = 1 \text{ のとき} \\ (1,a) & a < 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ を示せばよい．(P_n は放物線のグラフという閉集合上の点であるから，その極限も放物線のグラフ上の点となる．)

任意の $\epsilon > 0$ をとる．$\mathcal{C}_n$ と直線 $y = x$ の交点を (p_n, p_n) とすれば，この p_n は $p_n^n + p_n^n = 1$ つまり $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ であるから，$N \in \mathbb{N}$ を

$$\frac{1}{2} > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon\right)^N$$

を満たす N としてとれば，

$$n \geq N \Rightarrow p_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

とできる．このとき，$\mathcal{C}$ のどの点についても，その点との距離が ϵ より小さいような $\mathcal{C}_n$ の点が選べるし逆もまた然りだから $d(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}) < \epsilon$ とできていることになり，収束の定義から $\mathcal{C}_n$ は $\mathcal{C}$ に収束する．

□